

**Zeitschrift:** Jahrbuch der Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich  
**Herausgeber:** Sekundarlehrerkonferenz des Kantons Zürich  
**Band:** - (1930)

**Artikel:** Mathematische Aufgaben für die letzte Klasse der Sekundarschulen  
**Autor:** Gerlach, R. / Scherrer, F. R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-819534>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Mathematische Aufgaben

für die

## letzte Klasse der Sekundarschulen

VON

Dr. R. GERLACH und Dr. F. R. SCHERRER

ehemaligen Lehrern der Mathematik  
am Lehrerseminar des Kantons Zürich.

---

### Vorwort.

Mit der vorliegenden Aufgabensammlung will den Lehrern der Sekundarschulen Material zur Verfügung gestellt werden, das ihnen ermöglichen soll, die zusammenfassende Repetition des gesamten mathematischen Unterrichtsstoffes der Sekundarschule am Ende des letzten Schuljahres vielseitig anregend und fruchtbringend zu gestalten. Die Sammlung ist nicht für die Hand des Schülers bestimmt. Der Lehrer soll die Aufgaben mit der ganzen Schulklasse in der Weise lösen, daß er jeden einzelnen zur geistigen Mitarbeit heranzieht. Zu diesem Behufe wird er die Figuren nicht etwa vor der Lektion an die Wandtafel zeichnen, sondern sie parallel mit der Entwicklung des Gedankenganges vor den Augen der Schüler entstehen lassen.

Die Abteilung A umfaßt leichtere, die Abteilung B schwierigere Aufgaben. Die meisten wurden an den mündlichen Aufnahmeprüfungen am Seminar in Küsnacht behandelt, die übrigen jedoch erst für den besonderen Zweck dieser Sammlung geschrieben.

Um dem Lehrer das Auffinden geeigneter Aufgaben zu erleichtern, sind bei jeder Nummer in Klammern die zur Anwendung gelangenden Beziehungen durch abgekürzte Stichwörter angedeutet, die auf Seite 120 zusammengestellt sind.

Küsnacht, den 27. Februar 1930.

*Gerlach.*  
*Scherrer.*

**A 1** (*W.-Halbierende und Mittelnormale*)

Gegeben sei ein Winkel und auf seinen Schenkeln zwei Punkte  $A$  und  $B$ , die aber vom Scheitel ungleiche Entfernung haben. Man suche einen Punkt so, daß er erstens gleichen Abstand hat von den Schenkeln des Winkels und zweitens gleichen Abstand hat von  $A$  und  $B$ . (Zwei Örter.)

**A 2** (*Schlußrechn. oder Gl.*)

Von meinem Gelde habe ich zuerst einen Drittel und dann vom Reste noch drei Viertel ausgegeben. Wie viel hatte ich ursprünglich mitgenommen, wenn ich jetzt noch 5 Fr. 35 Rp. habe? (32 Fr. 10 Rp.)

**A 3** (*Verbind.-Strecke von Seitenmitten des Dreiecks*)

Welche Figur bilden die Seitenmitten eines ganz beliebigen Vierecks? Wann ist diese Figur ein Rhombus? ein Rechteck? ein Quadrat?

**A 4** (*W.-Summe des Vierecks, Gl.*)

In einem Viereck mißt der zweite Winkel  $25^\circ$  mehr als der erste, der dritte Winkel  $13^\circ$  mehr als der zweite und der vierte Winkel  $69^\circ$  mehr als der erste. Wie groß sind die einzelnen Winkel? ( $57^\circ$ ,  $82^\circ$ ,  $95^\circ$ ,  $126^\circ$ .)

**A 5** (*Gegenw. des Kreisvierecks*)

Man zeige, daß die Winkelhalbierenden eines Vierecks ein Kreisviereck einschließen.

**A 6** (*Prozentrechn.*)

Eine Aktie von 1000 Fr. ergibt eine Dividende von  $8\%$ . Die eidgenössische Couponsteuer beträgt  $3\%$ . Wie viel erhalte ich für einen (Jahres)coupon? (77.60.)

**A 7** (*Teilung der Hypot. durch Höhe*)

Über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiere man die Quadrate so, daß sie mit dem Dreieck den rechten Winkel gemein haben. Die beiden Ecken dieser Quadrate, die dem Scheitel dieses rechten Winkels gegenüberliegen, haben von der Hypotenuse Abstände, deren Summe gleich der Länge der Hypotenuse ist. Beweis?

**A 8** (*Bruchrechn.*)

Trägt man auf der Strecke  $AB$  von  $A$  aus  $\frac{13}{24}$  derselben ab und von  $B$  aus  $\frac{13}{18}$  derselben ab, so greifen die beiden abgetragenen Strecken mit 57 cm übereinander. Wie groß ist die ganze Strecke? (216 cm.)

**A 9** (*Periph.-W.*)

In einem Dreieck  $ABC$  ziehe man von  $C$  aus die Höhe des Dreiecks und den Durchmesser des Umkreises und beweise, daß diese beiden Linien mit den von  $C$  ausgehenden Dreiecksseiten gleiche Winkel bilden.

**A 10** (*Umgekehrte Proportionalität*)

12 Arbeiter brauchten bei 8-stündiger Arbeitszeit zur Ausbesserung einer Straße 147 Tage. In wie viel Tagen hätten 14 Arbeiter bei 9stündiger Arbeitszeit dieselbe Arbeit geleistet? (112 Tage.)

**A 11** (*Periph.-W.*)

Zu einem gleichseitigen Dreieck  $ABC$  sei der Umkreis gezeichnet worden. Ein beliebiger Punkt  $P$  auf dem Bogen  $BC$  habe von  $A$  den Abstand  $x$ , von  $B$  den Abstand  $y$  und von  $C$  den Abstand  $z$ . Man beweise, daß stets  $x = y + z$  ist. Wie muß  $P$  gelegen sein, damit  $y + z$  möglichst groß wird?

**A 12** (*Zinsrechn.*)

Jemand erhält 98 Fr. Zins von einem Kapital, das zu  $3\frac{1}{2}\%$  ausgeliehen ist. Wie viel erhält er, wenn der Zinsfuß auf  $3\frac{3}{4}\%$  erhöht wird? (Der Mehrbetrag ist  $\frac{1}{14}$ ; 105 Fr.)

A 13

*(Periph.-W.)*

Die drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  liegen auf einer Geraden so, daß  $AB$  5 cm und  $BC$  3 cm mißt. Man bestimme einen Punkt so, daß die Winkel  $APB$  und  $BPC$  je  $30^\circ$  messen.

A 14

*(Quadr. des Binoms)*

Man vereinfache den Ausdruck

$$\frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{(a + b)^2 - (a - b)^2}$$

(Antwort:  $1/2$ .)

A 15

*(Periph.-W.)*

Zwei ungleich große Kreise schneiden sich in  $A$  und  $B$ . Zieht man durch  $B$  zwei Transversalen, so werden die Stücke derselben, die innerhalb der beiden Kreise liegen, von  $A$  aus unter gleichem Winkel gesehen. Beweis?

A 16

*(Zinsrechn.)*

Jemand erhält von einem ausgeliehenen Kapital eine gewisse Summe als Jahreszins. Um wie viel muß das Kapital erhöht werden, damit es diesen Zins schon in 144 Tagen abwirft? (144 Tage =  $2/5$  von 360 Tagen.) (Um das  $1\frac{1}{2}$ -fache.)

A 17

*(Gegenw. des Kreisvierecks)*

Bei einem beliebigen Dreieck  $ABC$  lege man durch  $A$  einen beliebigen Kreis, der  $AB$  in  $D$  und  $AC$  in  $E$  schneide. Dann lege man durch  $B$  und  $D$  einen zweiten Kreis, der  $BC$  in  $F$  schneiden möge. Ist dann  $P$  der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise, so ist zu zeigen, daß auch  $C$ ,  $E$ ,  $P$  und  $F$  auf einem Kreise liegen.

A 18

*(Berühr.-Kr. zweier Geraden)*

Bei einem rechtwinkligen Dreieck zeichne man einen Kreis, der beide Katheten berührt und zwar die kleinere Kathete in ihrem Endpunkt. Man beweise, daß die auf der Hypotenuse gelegene Kreissehne gleich der doppelten Dreieckshöhe ist.

A 19

*(Zinsrechn.)*

Wenn 6210 Fr. zu 5 % verzinst werden, so reichen die Zinsen für einen gewissen Zweck aus. Da ich aber nur  $4\frac{1}{2}\%$  bekomme, so muß ich ein größeres Kapital anlegen. Welches?  
(Zinsfußverminderung  $\frac{1}{10}$ , Kapitalvermehrung  $\frac{1}{9}$ .)

A 20

*(Inkr. des gleichseit. Dreiecks)*

Einem Kreissektoren von  $60^\circ$  ist ein Kreis einzuschreiben. Wo berührt derselbe den Kreisbogen, die Radien? Warum ist der Radius dieses Kreises der dritte Teil des Radius des Sektors?

A 21

*(Mittellinien u. Fl. des Dreiecks)*

In einem Parallelogramm  $ABCD$  sei  $P$  die Mitte von  $BC$  und  $Q$  die Mitte von  $CD$ . Man ziehe die Strecken  $AP$ ,  $AQ$ ,  $PQ$  und  $BD$ . In wie viel Stücke wird das Parallelogramm zerlegt? Man berechne die Fläche jedes Stückes als Bruchteil der ganzen Fläche. Probe? Wird die Diagonale  $BD$  durch  $AP$  und  $AQ$  in 3 gleiche Teile geteilt?

A 22

*(Zinsrechn., Gl. m. 3 Unbek.)*

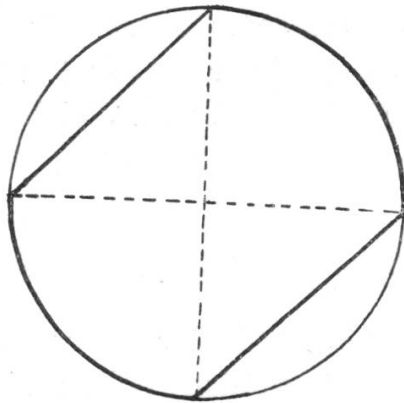
Jemand hat drei Kapitalien, die zusammen 10300 Franken betragen, zinstragend angelegt, und zwar das erste zu  $4\frac{3}{4}\%$ , das zweite zu  $4\frac{1}{2}\%$  und das dritte zu  $4\frac{1}{4}\%$  Prozent. Er bezieht von allen dreien zusammen einen Jahreszins von 465 Franken. Hätte er aber das erste Kapital zu  $4\frac{1}{4}\%$ , das zweite zu 5 und das dritte zu  $4\frac{3}{4}\%$  Prozent angelegt, so wäre seine jährliche Zinseneinnahme um  $12\frac{1}{2}$  Franken größer. Welches sind die Kapitalien?  
(3900, 3100, 3300.)

A 23

*(Flächengleiche Dreiecke)*

In einem regelmäßigen Sechseck werden alle Nebendiagonalen gezogen. Welche Figur umschließen sie? Was ist von den übrigen Flächenstücken zu sagen? Welchen Bruchteil bildet die zentrale Fläche von der Fläche der ganzen Figur? ( $\frac{1}{3}$ .)

**A 24** (Seitenverhält. im gleichschenkl. rechth. Dreieck)



Ein Zylinder ist auf zwei Seiten parallel so angeschliffen worden, daß die beiden in der Figur angegebenen Durchmesser aufeinander senkrecht stehen. Wie groß ist der Radius  $r$  des Zylinders anzunehmen, wenn die Schlüsselweite  $d$  (Abstand der parallelen Sehnen) gegeben ist?  $(d : \sqrt{2}.)$

**A 25**

(Teilungsrechn.)

3878 Franken sollen unter vier Personen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  so verteilt werden, daß  $B$  drei Viertel von dem erhält, was  $A$  zufällt und dazu noch 300 Franken,  $C$  die Hälfte des Anteils von  $B$  und dazu noch 200 Franken und daß  $D$  100 Franken weniger erhält als  $B$  und  $C$  zusammen. Wie viel erhält jeder?

Wegleitung: Ermitteln wir zuerst diejenigen Bestandteile der Anteile von  $B$ ,  $C$  und  $D$ , die nur von den drei letzten der angegebenen Beträge abhängen. Von diesen erhält

$B$	Fr. 300.—
$C$ Fr. 150 + Fr. 200 = „	350.—
$D$ „ 650 — „ 100 = „	550.—
	zusammen Fr. 1200.—

folglich bleiben noch 2678 Franken so zu verteilen, daß sich die  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  zufallenden Beträge zueinander verhalten wie  $1 : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \frac{9}{8}$  oder wie  $8 : 6 : 3 : 9$ . Der Betrag von 2678 Franken geht also in 26 Teile, somit erhält davon

$$A \ 8 \cdot 103 = 824, \ B \ 6 \cdot 103 = 618, \ C \ 3 \cdot 103 = 309$$

und  $D \ 9 \cdot 103 = 927$  Franken

demnach im ganzen

$A$  824 Fr.,  $B$  918 Fr.,  $C$  659 Fr. und  $D$  1477 Franken.

Logisch leichter gestaltet sich die algebraische Lösung mit dem Anteil von  $A$  als Unbekannte.

**A 26** (*Rechtw. 30°-Dreieck, Tang. von Paus.*)

In einem Kreise vom Mittelpunkt  $M$  und vom Radius  $r$  sei  $AB$  ein Durchmesser. Man zeichne in  $A$  und  $B$  die Kreis-tangenten und nehme auf der Tangente in  $A$  einen Punkt  $C$  so an, daß  $MC = 2r$  wird. Dann konstruiere man von  $C$  aus die zweite Tangente an den Kreis (!) und berechne die Länge  $CD$  dieser Tangente zwischen den beiden parallelen Tangenten, sowie die Stücke, in welche sie durch den Be-rührungspunkt zerlegt wird.  $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}r + \sqrt{3}r\right)$ . Wie groß ist in  $C$  und  $D$  der Winkel der beiden Tangenten?

**A 27** (*Mischungsrechn.*)

Wie groß ist der Silberwert eines Fünffrankenstücks (25 gr., Feinheit 900/1000), wenn ein Kilogramm Feinsilber 98 Fr. kostet?

**A 28** (*Verwandl. eines Rhombus in ein Quadr.*)

Man konstruiere einen Rhombus aus seiner Seite  $a = 49$  mm und dem Radius seines Inkreises  $\rho = 18$  mm, verwandle ihn in ein flächengleiches Quadrat und berechne die Seite des letzteren.

Wegleitung: Verwandlung des Rhombus sowohl in ein Rechteck mit der Seite  $a$  als auch in eines mit einer Diagonale als Seite. Verwandlung des Rechteckes in ein Quadrat sowohl nach dem Kathetenquadrat- als auch nach dem Höhenquadrat-satz. Welche Konstruktion ist die bequemste?

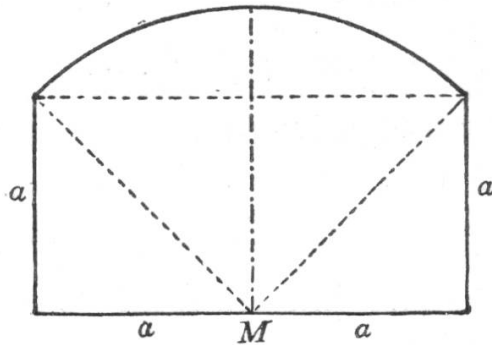
**A 29** (*Kreisviereck, Pyth., Pyr.-Vol.*)

Drei aufeinanderfolgende Seiten eines Kreisviereckes messen der Reihe nach 9 cm, 2 cm und 6 cm. Die beiden zuerst ge-nannten Seiten schließen einen rechten Winkel ein. Das Kreis-viereck bildet die Grundfläche einer Pyramide, an der jede Seitenkante  $5\frac{1}{2}$  cm lang ist. Man bestimme den Rauminhalt der Pyramide. (30 cm<sup>3</sup>.)



**A 30***(Berühr.-Kr. u. Bogenlänge)*

Um einen Kreis (Radius  $a$ ) kann ich 6 andere ebenso große Kreise legen, die sich zu zweien und auch den ersten Kreis berühren. Wie lang ist eine Schnur, die alle sieben Kreise umspannt? (Kette für sieben Baumstämme.)

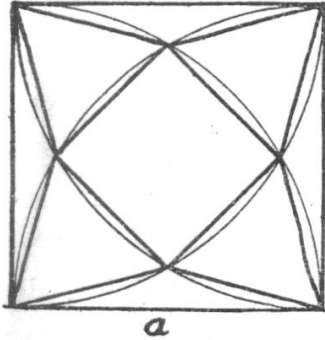
**A 31***(Pyth. u. Kr.-Sektor)*

Man konstruiere ein Kellerfenster nach der Skizze und berechne seine Fläche, sowie die Länge seiner Symmetrieachse.

**B 1**

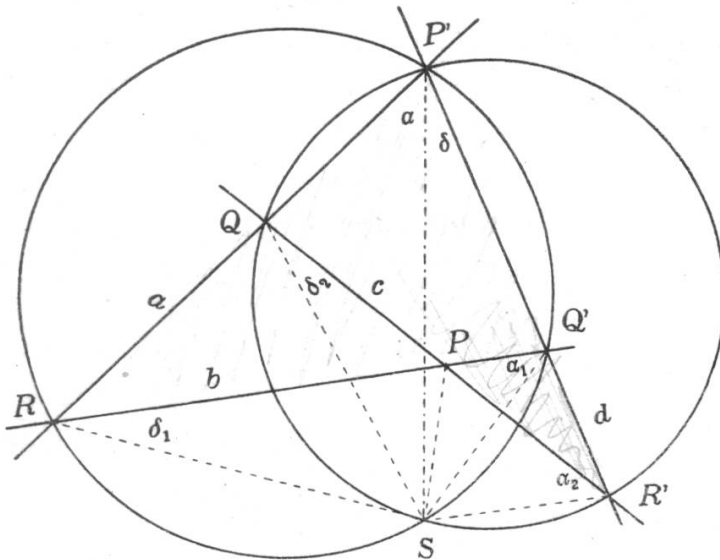
(Trisektion des rechten W.)

In einem Quadrate von der Seite  $a$  ziehe man von den Ecken aus die vier Viertelskreise vom Radius  $a$ , die im Innern des Quadrates liegen. Dann verbinde man die neuen Kreisschnittpunkte der Reihe nach miteinander und mit den nächsten Quadratecken. In welche Figuren wird dadurch das Quadrat zerlegt? Aufklappen der Dreiecke um die Zentralfigur bis zum Zusammentreffen. Welcher Körper entsteht dadurch?



**B 2**

(Periph.-W.)



Irgend vier gerade Linien  $a, b, c, d$ , von denen weder zwei parallel sind, noch drei durch denselben Punkt gehen, bestimmen zu je dreien im ganzen vier Dreiecke  $PQR, PQ'R, P'Q'R$  und  $P'QR'$ . Die Umkreise der beiden letzteren schneiden einander außer in  $P'$  noch in einem zweiten Punkt  $S$ . Verbinden wir diesen mit den sechs Ecken der genannten Dreiecke, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

- $\alpha = \alpha_1$  als Periph.-Winkel im Kreis links über dem Bogen  $SR$ ,
- $\delta = \delta_1$  " " " " " " " "  $SQ'$ ,
- $\alpha = \alpha_2$  " " " " rechts " " " "  $SQ$ ,
- $\delta = \delta_2$  " " " " " " " "  $SR'$ .

Daher auch  $\alpha_1 = \alpha_2$  und  $\delta_1 = \delta_2$ . Mithin liegen die Punkte  $S$  und  $P$  mit  $Q$  und  $R$  auf einem und mit  $Q'$  und  $R'$  auf einem andern Kreis. Die Umkreise der vier oben genannten Dreiecke gehen somit alle durch den Punkt  $S$ . D. h. Vier gerade Linien von allgemeiner Lage bilden vier Dreiecke, deren Umkreise durch denselben Punkt gehen. (Dieser Punkt wird nach seinem Entdecker der Steinersche Punkt des Vierseits genannt.)

**B 3***(Kettenregel)*

Wie groß ist in deutscher Währung der Arbeitslohn, der für 23 l der Lösung eines gewissen Salzes in Wasser berechnet werden muß, wenn 17 l Lösung 13 kg Salz enthalten, 19 kg Salz in 7 Stunden hergestellt und aufgelöst werden, wenn ferner der Arbeitslohn für 9 Stunden 11 Franken beträgt und für 5 Franken 4 Mark in Rechnung gestellt werden?

Wegleitung: Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich nach dem Dreisatz wie folgt:

17 l (Lösung)	aus	13 kg (Salz)	
1 l	" "	$\frac{13}{17}$ kg	
23 l	" "	$\frac{23 \cdot 13}{17}$ kg	
19 kg	in	7 St.	
1 kg	" "	$\frac{7}{19}$ St.	
$\frac{23 \cdot 13}{17}$ kg	" "	$\frac{23 \cdot 13 \cdot 7}{17 \cdot 19}$ St.	
9 St.	für	11 Fr.	
1 St.	" "	$\frac{11}{9}$ Fr.	
$\frac{23 \cdot 13 \cdot 7}{17 \cdot 19}$ St.	" "	$\frac{23 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 9}$ Fr.	
5 Fr.	gleich	4 Mk.	
1 Fr.	" "	$\frac{4}{5}$ Mk.	
$\frac{23 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 9}$ Fr.	" "	$\frac{23 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 4}{17 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 5}$ Mk.	

Somit muß für 23 l Salzlösung ein Arbeitslohn von  $\frac{23 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 4}{17 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 5}$  Mk. berechnet werden.

Sind  $x$  Mark der für 23 l Salzlösung zu berechnende Arbeitslohn und stellt man die zusammengehörenden Quantitäten der verschiedenen Größen, durch einen senkrechten Strich getrennt, so nebeneinander, daß jede Zeile mit der Größenart beginnt, mit der die vorhergehende schließt und setzt die Zusammenstellung fort, bis rechts die Größenart auftritt, mit der man die erste Zeile begonnen hat, so erhält man das folgende Schema:

$x$ Mk.	23 l
17 l	13 kg
19 kg	7 St.
9 St.	11 Fr.
5 Fr.	4 Mk.

Man erhält demnach für  $x \cdot 17 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 5$  Mk. 23 l Salzlösung aus 23 l 13 kg Salz in 23 l 7 St. 9 Fr. 5 Pf. für 23 l 13 kg 7 St. 11 Fr. 5 Pf., die gleich 23 l 13 kg 7 St. 11 Fr. 4 Pf. sind. Somit ist

$$x \cdot 17 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 5 = 23 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 4;$$

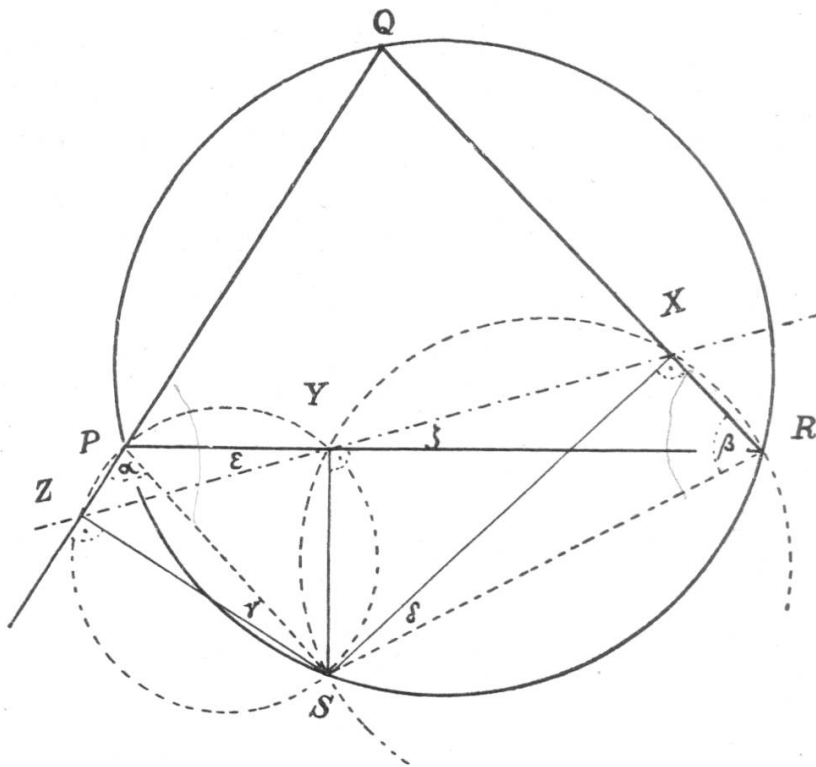
das heißt: Das Produkt der Maßzahlen links vom Strich ist gleich dem Produkt der Maßzahlen rechts vom Strich. Man bezeichnet diese Aussage als Kettenregel oder Kettensatz. Wir erhalten danach

$$x = \frac{23 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 4}{17 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 5} \quad (6 \text{ Mk. } 39 \text{ Pf.})$$

#### B 4 (Umkr. des Dreiecks. Periph.-W.)

Wenn man durch die Ecken  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  irgend eines Dreiecks einen Kreis legt, auf dessen Bogen  $RP$  den Punkt  $S$  beliebig wählt, von ihm aus auf die Geraden  $QR$ ,  $RP$  und  $PQ$  Normalen fällt und deren Fußpunkte der Reihe nach mit  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  bezeichnet, wie groß ist dann der Winkel, den die Strecken  $YX$  und  $YZ$  einschließen\*?

\* Es empfiehlt sich, diese beiden Strecken verschiedenfarbig zu zeichnen.



Wegleitung: Weil die Winkel bei  $P$  und  $R$  des Kreisviereckes  $PQRS$  einander zu zwei Rechten ergänzen, ist  $\angle\alpha = \angle\beta$  und daher auch  $\angle\gamma = \angle\delta$ . Die Punkte  $Z$  und  $Y$  liegen auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $PS$  und die Punkte  $X$  und  $Y$  auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $RS$ , woraus sich  $\angle\gamma = \angle\varepsilon$  und  $\angle\delta = \angle\zeta$  und schließlich  $\angle\varepsilon = \angle\zeta$  ergibt. Demnach  $\angle XYZ = \angle\zeta + \angle RYZ = \angle RYZ + \varepsilon = 2R$ . Das heißt: Die Fußpunkte der drei Normalen gehören derselben Geraden an (die man nach ihrem Entdecker die Wallacesche Gerade nennt und früher Simsonsche Gerade genannt hat.)

**B 5**      (*Reg. Vielecke u. Fl. des gleichseit. Dreiecks*)

Man zeichne ein reguläres Sechseck von der Seite  $a$ . Über einer Seite konstruiere man ein Quadrat (Benützung passender Diagonalen). Wenn man über allen Seiten die Quadrate (nach außen) konstruiert hat, welche Figur bildet dann eine Schnur, die die ganze Zeichnung umspannt? Fläche dieser Figur?

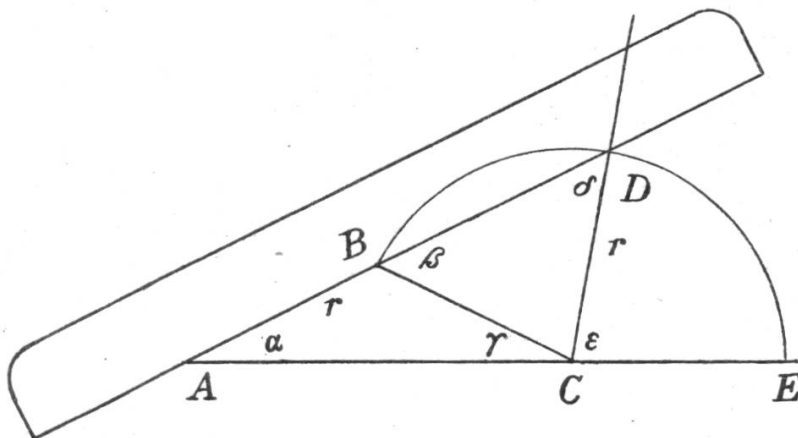
$$(F = 6 \square + 12 \triangle = 6a^2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 3(2 + \sqrt{3}) a^2.)$$

**B 6***(Mischungsrechn.)*

Jemand hat schweizerische Ein- und Fünffrankenstücke. Ein Frankenstück wiegt 5 g und hat den Feingehalt 835 ‰; ein Fünffrankenstück wiegt 25 g und hat den Feingehalt 900 ‰. Wie viele Franken- und wie viele Fünffrankenstücke muß er wenigstens zusammenschmelzen, um Silber vom Feingehalt 875 ‰ zu erhalten?

Wegleitung: Im Hinblick auf die herzustellende Legierung enthalten

1000 g Silber vom Feingehalt 835 40 g Silber zu wenig,  
 1000 g " " " 900 25 g " " viel,  
 somit muß er je 5 g des geringeren mit je 8 g des besseren Silbers legieren, d. h. 200 g des besseren mit 125 g des geringeren oder 25 Einfrankenstücke mit 8 Fünffrankenstücken zusammenschmelzen.

**B 7***(W.-Beziehungen am Dreieck.)*

Es sei ein spitzer Winkel  $\alpha$  mit dem Scheitel  $A$  gegeben. Man trägt auf dem einen Schenkel eine Strecke  $AB$  von der Länge  $r$  ab, beschreibt um  $B$  mit dem Radius  $r$  einen Kreis, der den andern Schenkel des Winkels  $\alpha$  in  $C$  schneidet, beschreibt um  $C$  ebenfalls mit dem Radius  $r$  einen Kreis, der die Gerade  $AB$  in  $B$  und  $D$  und die über  $C$  hinaus verlängerte Gerade  $AC$  in  $E$  schneidet. Wie groß sind dann, durch  $\alpha$  ausgedrückt, die Winkel  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\epsilon$ ? Wenn also ein beliebiger konkaver Winkel  $\epsilon$  gegeben ist und man auf der geraden

Kante eines Papierstreifens oder Lineals (Maßstabes) eine Strecke  $AB = CD$  abträgt, dann den Papierstreifen so legt, daß der Punkt  $A$  auf die rückwärtige Verlängerung des Schenkels  $CE$ , der Punkt  $B$  auf den Kreis um  $C$  mit dem Radius  $CD$  zu liegen kommt und die Kante  $AB$  des Papierstreifens durch  $D$  geht, dann ist  $\angle \alpha = \frac{1}{3} \epsilon$ . Wie kann man daher ein regelmäßiges Neuneck konstruieren?

Die Schüler sind darauf aufmerksam zu machen, daß die Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile hier durch Ausprobieren erreicht wird, da sie ja mit Zirkel und Lineal allein unmöglich ist.

### B 8 (Teilung nach umgekehrt. Verhältn.)

Ein reicher Sportsmann setzte einen Preis von Fr. 300.— für denjenigen Kavalleristen aus, der eine gewisse Strecke mit seinem Dienstpferd in voller militärischer Ausrüstung in weniger als 4 Stunden zurücklegt. Im Falle, wo mehrere Reiter sich des Preises würdig erweisen, soll er im umgekehrten Verhältnis der gebrauchten Marschzeiten unter die Betreffenden verteilt werden.

Der Reiter A	legte die Strecke	in	$3^{\text{h}} 19^{\text{m}} 20^{\text{s}}$	zurück,	
" " B	" " "	" " "	$3^{\text{h}} 27^{\text{m}}$	"	"
" " C	" " "	" " "	$3^{\text{h}} 44^{\text{m}} 15^{\text{s}}$	"	"
" " D	" " "	" " "	$3^{\text{h}} 54^{\text{m}}$	"	"

Die übrigen beteiligten Reiter erreichten das Ziel nicht innerhalb 4 Stunden und fallen daher für die Preisverteilung außer Betracht. Wie sind die 300 Fr. auf die vier Reiter zu verteilen?

Wegleitung: Die Marschzeiten der Reiter A, B, C, D betragen der Reihe nach 11960, 12420, 13455, 14040 Sekunden. Weil die Preisanteile sich umgekehrt wie die Marschzeiten verhalten sollen, so muß beispielsweise der Anteil von B zum Anteil von D sich verhalten wie 14040 : 12420 oder wie

$$\frac{1}{12420} : \frac{1}{14040},$$

woraus ersichtlich ist, daß die Anteile von A,

B, C und D sich der Reihe nach zueinander verhalten wie

$$\frac{1}{11960} : \frac{1}{12420} : \frac{1}{13455} : \frac{1}{14040}$$

oder wie 27 : 26 : 24 : 23. Somit erhält A 81, B 78, C 72 und D 69 Franken.

**B 9** (Zentralabstand gleich. Sehnen, Tang. von Paus, Pyth.)

In einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und  $13 \{3^{1/4}\}^*$  cm Radius soll eine  $10 \{2^{1/2}\}$  cm lange Sehne gelegt werden, die verlängert durch einen gegebenen Punkt  $P$  geht, der  $20 \{5\}$  cm von  $O$  entfernt ist. Wie lang sind die von  $P$  an den Kreis gezogenen Tangenten, gemessen von  $P$  bis zu den Berührungspunkten?

Konstruktion: Wie liegen alle gleich langen Sehnen eines Kreises? Wie erhält man die Tangenten, die durch einen gegebenen Punkt gehen? Anzahl der Lösungen.

Rechnerische Lösung: Abstand der Sehne vom Mittelpunkt? Entfernung des Halbierungspunktes der Sehne und der Sehnenendpunkte von  $P$ . Länge der Tangente:  $\sqrt{20^2 - 13^2} = \sqrt{231} = \sqrt{11 \cdot 21} = 15,199$  cm.  $\{\sqrt{5^2 - (3^{1/4})^2} = \sqrt{7/4 \cdot 33/4} = 3,800$  cm} Wie erklärt sich, daß die Tangentenlänge das geometrische Mittel aus den Abständen der Sehnenendpunkte von  $P$  ist?

\* Zwischen  $\{ \}$  Daten für ein Beispiel in gebrochenen Zahlen.

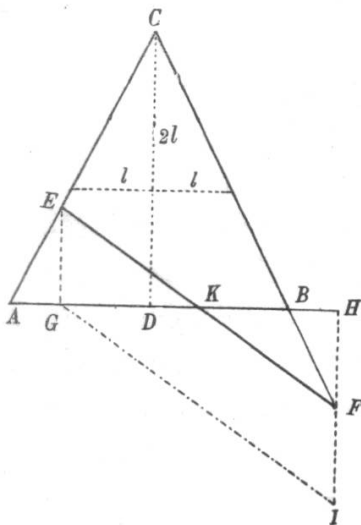
**B 10**

(Pyth., Tang.-Viereck)

Die Schenkel eines Trapezes messen je 13 m, die Parallelen 11 m und 21 m. Wie groß ist die Höhe, die Fläche des Trapezes? Hat dieses Trapez einen Inkreis? Um welches Stück müßte man die beiden Parallelen verändern, damit es einen Inkreis erhält?

**B 11**

(Aehnlichk., Pyth.)



Man konstruiert ein gleichschenkliges Dreieck  $ABC$ , dessen Höhe  $CD$  gleich der Basis  $AB$  ist und dessen Schenkel 31 L.-E. (Längen-Einheiten) messen. Hierauf trägt man auf dem Schenkel  $AC$  des konstruierten Dreiecks die Strecke  $AE$  von 11 L.-E. und auf der Verlängerung des Schenkels  $BC$  die Strecke  $BF$  ebenfalls von 11 L.-E. ab. Wie lang ist die Strecke  $EF$  und wie wird sie von der Basis  $AB$  geteilt?



Wegleitung: Hat die halbe Basis  $x$  L.-E., so ist

$$x^2 + (2x)^2 = 31^2$$

$$\text{daher } x = \frac{31}{\sqrt{5}} = 6,2 \sqrt{5}$$

$$AB = CD = 12,4 \sqrt{5} \text{ L.-E.}$$

Die Gerade  $AB$  wird von der Parallelen zu  $CD$  durch  $E$  in  $G$  und von der durch  $F$  gehenden zu  $CD$  Parallelen in  $H$  geschnitten. Wie sind die Dreiecke  $AGE$  und  $BFH$  beschaffen? Was folgt daraus für die Strecken  $AB$  und  $GH$ ? Die Parallele durch  $G$  zu  $EF$  schneidet die Gerade  $HF$  in  $I$ . Wie lang ist daher  $GI$ ? Wie teilt der Punkt  $F$  die Strecke  $HI$ ? Wie sind die Verhältnisse  $EG : EA$  und  $CD : CA$  beschaffen? Wie groß ist das letztere? ( $0,4 \sqrt{5}$ .) Wie viele L.-E. hat daher  $EG$ ? ( $4,4 \sqrt{5}$ .) Was folgt hieraus für die Maßzahl von  $GI$ ?

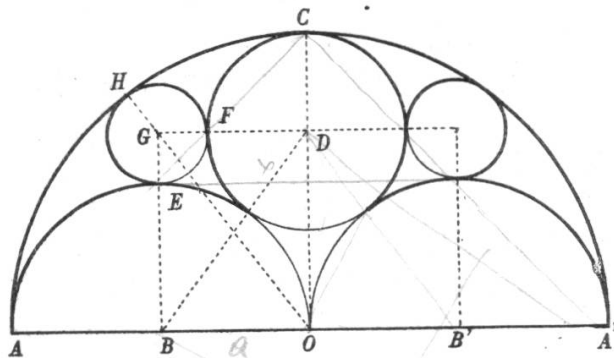
$$EF = GI = \sqrt{(12,4 \sqrt{5})^2 + (8,8 \sqrt{5})^2} = 4 \sqrt{5} (3,1^2 + 2,2^2)$$

$$= 4 \sqrt{72,25} = 34 \text{ L.-E.}$$

Wie sind die Dreiecke  $EGK$  und  $FHK$  beschaffen? Wie teilt daher  $AB$  die Strecke  $EF$ ?

## B 12

(Kr.-Berühr., Pyth., Gl. m. 1 Unb.)



Gegeben ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Durchmesser  $AA'$ . Man legt in den ersteren Halbkreise mit den Durchmessern  $AO$  und  $A'O$  (Mittelpunkte  $B$  und  $B'$ ).

Gesucht ein Kreis, der alle drei Halbkreise berührt.

Wegleitung: Zuzufolge der Symmetrie der Figur zur Mittelnormalen von  $AA'$  liegt der Mittelpunkt  $D$  des gesuchten Kreises auf dem Radius  $OC$  des großen Halbkreises, der zu  $AA'$  normal liegt. Die Gerade  $BD$  schneidet den Halbkreis um  $B$  in dessen Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreis. Im Dreieck  $BOD$  ist daher, wenn man die Strecke  $BO$  mit  $a$  und den gesuchten Kreisradius mit  $x$  bezeichnet,

$$(a + x)^2 - (2a - x)^2 = a^2$$

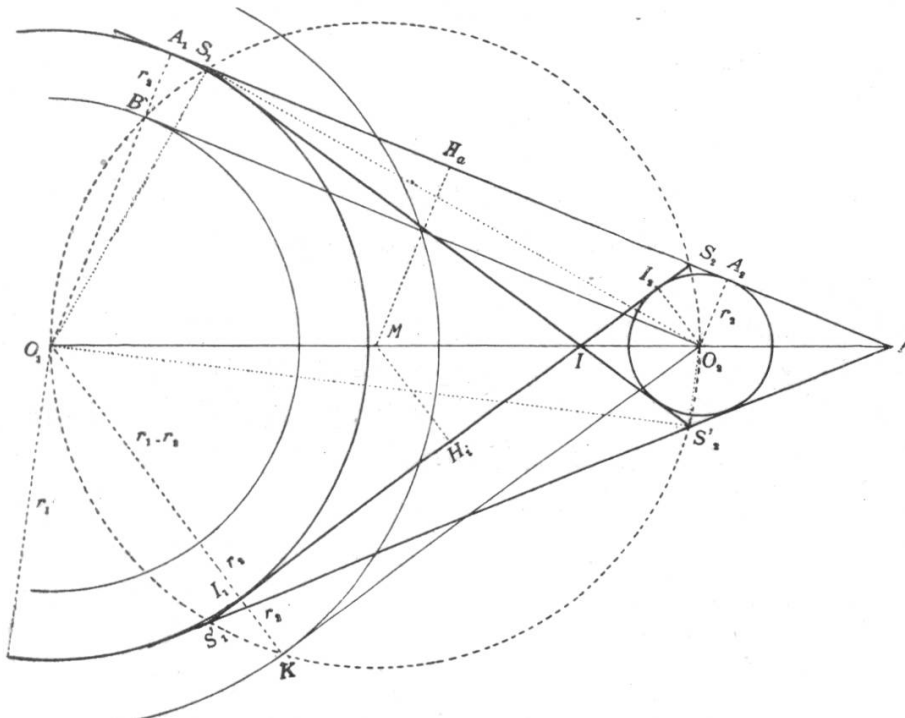
$$\text{oder } 3a(2x - a) = a^2$$

somit  $x = \frac{2}{3}a = CD$ ,  $BD = \frac{5}{3}a$  und  $OD = \frac{4}{3}a$ .

Die in  $B$  auf  $AA'$  errichtete Normale und die zu  $AA'$  durch  $D$  gelegte Parallele schneiden einander im Punkt  $G$ , der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius  $\frac{a}{3}$  ist, der die Kreise um  $O$ ,  $B$  und  $D$  berührt.

Man kann die ganze Figur aus dem rechtwinkligen Dreieck  $BOD$  entstehen lassen, dessen Seiten  $BO$ ,  $OD$  und  $BD$  sich zueinander wie  $3:4:5$  verhalten. Die nachträgliche Verstärkung von Teilen der Kreise läßt das Gerippe romanischen Maßwerkes hervortreten.

**B 13** (*Gemeins. Tang. zweier Kr., Pyth., Fl. des Tang.-Polyg.*)



Der Abstand der Mittelpunkte  $O_1$  und  $O_2$  zweier Kreise mit den Radien  $r_1 = 32$  L.-E. und  $r_2 = 7$  L.-E. beträgt 65 L.-E. Wie groß ist der Umfang  $u$  und die Fläche  $F$  des von ihren gemeinsamen Tangenten begrenzten konvexen Vierecks?

Wegleitung: Zuzufolge der Symmetrie der beiden Kreise zur Geraden  $O_1O_2$  liegen auf dieser auch der Schnittpunkt  $A$

der äußern und der Schnittpunkt  $I$  der innern gemeinsamen Tangenten. Verschiebt man eine äußere und eine innere gemeinsame Tangente parallel sich selbst, bis sie durch  $O_2$  geht, so hat die erstere den Abstand  $r_1 - r_2 = 25$  L.-E. und die letztere den Abstand  $r_1 + r_2 = 39$  L.-E. von  $O_1$ . Jene berührt den Kreis um  $O_1$  mit dem Radius  $r_1 - r_2$  in  $B$  und diese den Kreis um  $O_1$  mit dem Radius  $r_1 + r_2$  in  $K$ . Die Punkte  $B$  und  $K$  liegen auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $O_1O_2$  und dem Mittelpunkt  $M$ .  $A_1A_2 = BO_2 = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{90 \cdot 40} = 60$  L.-E.  $I_1I_2 = KO_2 = \sqrt{65^2 - 39^2} = \sqrt{104 \cdot 26} = \sqrt{16 \cdot 13^2} = 52$  L.-E. Bezeichnen  $S_1, S_2, S'_1, S'_2$  die Schnittpunkte der innern Tangenten mit den äußern, so halbiert  $S_1O_1$  den Winkel  $A_1S_1S'_2$  und  $S_1O_2$  den Winkel  $A_2S_1S'_2$ , also  $\angle O_1S_1O_2 = 1 R$ . Aus analogen Gründen ist  $\angle O_1S_2O_2 = 1 R$ . Die vier mit  $S$  (und angehängten Indizes) bezeichneten Punkte liegen daher auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $O_1O_2$ . Der Fußpunkt  $H_a$  der von  $M$  auf  $A_1A_2$  gefällten Normalen (die parallel ist zu  $O_1A_1$ ) halbiert nicht nur  $A_1A_2$ , sondern auch  $S_1S_2$ , daher  $A_1S_1 = S_2A_2$ , und der Fußpunkt  $H_i$  der von  $M$  auf  $I_1I_2$  gefällten Normalen (die parallel ist zu  $O_1I_2$ ) halbiert sowohl  $I_1I_2$  als auch  $S'_1S_2$ , daher  $S'_1I_1 = I_2S_2 = A_2S_2$ . Die acht Abstände der mit  $S$  bezeichneten Punkte von den ihnen benachbarten Berührungspunkten der vier gemeinsamen Tangenten sind somit gleich lang.  $S'_1S_2 = S'_1I_1 + I_1S_2 = A_1S_2 + S_2A_2 = A_1A_2$ . D. h.: Das zwischen den Berührungspunkten liegende Stück einer der äußern Tangenten ist gleich dem von diesen begrenzten Stück einer innern gemeinsamen Tangente. Deshalb ist auch  $S_1S_2 = I_1I_2 = 52$  L.-E., mithin  $A_1S_1 = A_2S_2 = S_2I_2 = 4$  L.-E.  $\triangle IO_2I_2 \sim \triangle O_2O_1K$  und  $\triangle AO_2A_2 \sim \triangle O_2O_1B$ , deshalb

$$II_2 = 7 \cdot \frac{52}{39} \text{ L.-E. und } AA_2 = 7 \cdot \frac{60}{25} \text{ L.-E.,}$$

daher der halbe Umfang des Vierecks  $AS_2IS'_2$

$$s = 7 \left( \frac{4}{3} + \frac{12}{5} \right) + 8 = \frac{7 \cdot 56 + 8 \cdot 15}{15} = \frac{8(49 + 15)}{15} = \frac{512}{15} \text{ L.-E.}$$

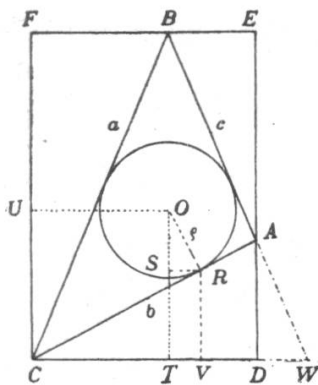
Weil die Seiten des Vierecks als Tangenten den Kreis um  $O_2$  einschließen, ist  $F = s \cdot 7$ , folglich

$$u = \frac{1024}{15} \text{ L.-E. und } F = \frac{3584}{15} (\text{L.-E.})^2.$$

Proben: Sowohl die vier Punkte  $A$  als auch die vier Punkte  $I$  liegen je auf einem Kreis um  $M$ . Die Halbierungspunkte der von den Berührungspunkten begrenzten Stücke der Tangenten liegen auf einer Normalen von  $O_1 O_2$ .

B 14

(Dreiecksf. Pyth., Inkr., Ähnlichk.)



Beim Rechteck  $CDEF$  ist die Seite  $CD$  90 mm und die Seite  $CF$  132 mm lang. Auf der Seite  $DE$  liegt 48 mm von  $D$  entfernt ein Punkt  $A$  und auf der Seite  $EF$  35 mm von  $E$  entfernt ein Punkt  $B$ . Man berechne:

1. den Flächeninhalt  $I$  des Dreiecks  $ABC$ ,
2. dessen Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und die Höhen  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,
3. den Radius  $\rho$  seines Inkreises,
4. die Abstände  $x$  und  $y$  des Inkreismittelpunktes von den Seiten  $CF$  und  $CD$  des Rechteckes.

Wegleitung:

1.  $I = 90 \cdot 132 - (90 \cdot 24 + 35 \cdot 42 + 55 \cdot 66) \text{ mm}^2$   
 $= 30 [3 \cdot 132 - (18 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 11^2)] = 30 \cdot 154 = 4620 \text{ mm}^2$
2.  $a = \sqrt{132^2 + 55^2} \text{ mm}$ ,  $b = \sqrt{90^2 + 48^2} \text{ mm}$ ,  $c = \sqrt{35^2 + 84^2} \text{ mm}$   
 $a = 11 \sqrt{12^2 + 5^2} \text{ mm}$ ,  $b = 6 \sqrt{15^2 + 8^2} \text{ mm}$ ,  $c = 7 \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ mm}$   
 $a = 143 \text{ mm}$ ,  $b = 102 \text{ mm}$ ,  $c = 91 \text{ mm}$   
 $h_1 = \frac{60 \cdot 154}{143} \text{ mm}$ ,  $h_2 = \frac{60 \cdot 154}{102} \text{ mm}$ ,  $h_3 = \frac{60 \cdot 154}{91} \text{ mm}$   
 $h_1 = 64 \frac{8}{13} \text{ mm}$ ,  $h_2 = 90 \frac{10}{17} \text{ mm}$ ,  $h_3 = 101 \frac{7}{13} \text{ mm}$
3. Wie erhalten wir den Mittelpunkt  $O$  des Inkreises? Wie sind die Abstände der Ecken des Dreiecks von den benachbarten Berührungspunkten des Inkreises beschaffen? Bezeichnet  $R$  den Berührungspunkt auf der Seite  $AC$  und  $s$  den halben Dreiecksumfang, so ist

$$CR = s - c = 168 - 91 \text{ mm} = 77 \text{ mm}.$$

Die Verbindungsgeraden des Punktes  $O$  mit den Ecken des Dreiecks zerlegen dieses in drei Dreiecke mit der gemeinsamen Höhe  $\rho$ ; daher ist

$$I = s\rho,$$

$$\rho = 27\frac{1}{2} \text{ mm.}$$

4. Um die Abstände  $x$  und  $y$  des Punktes  $O$  von  $CF$  und  $CD$  zu erhalten, fällen wir von  $O$  die Normalen  $OT$  auf  $CD$  und  $OU$  auf  $CF$ . Die durch  $R$  zu  $CF$  gezogene Parallele schneidet  $CD$  in  $V$  und die durch  $R$  zu  $CD$  gezogene Parallele schneidet  $OT$  in  $S$ . Nun ist  $x = CV - RS = 90 \cdot \frac{77}{102} - 48 \cdot \frac{27\frac{1}{2}}{102} = 55 \text{ mm.}$   $y = RV + SO = 48 \cdot \frac{77}{102} + 90 \cdot \frac{27\frac{1}{2}}{102} = 60\frac{1}{2} \text{ mm.}$  Was folgt aus der Gleichheit von  $EB$  und  $CT$ ? Man bringe  $BA$  mit  $CD$  zum Schnitt in  $W$  und berechne zur Probe die Strecke  $TW = TD + DW$ .

$$\left[ DW = \frac{35}{84} \cdot 48 = 20. \right]$$

**B 15**

(Pyth., Kr.-Fl., Quader, Zyl.-Vol.)

Bei einem geraden, 24 cm hohen, quadratischen Prisma mißt eine Körperdiagonale 25 cm. Wie groß ist sein Rauminhalt? (588 cm<sup>3</sup>.)

Der Um- und der Inkreis der Basis begrenzen einen Ring. Wie groß ist der Rauminhalt eines über dem Ring stehenden 24 cm hohen Hohlzylinders? ( $\pi = \frac{22}{7}$ .) (462 cm<sup>3</sup>.)

**B 16**

(Pyth., In- u. Ankr.)

Die Hypotenuse und die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks unterscheiden sich vom Siebenfachen des vierten Teiles der andern Kathete je um 4 cm. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks und die Radien des Inkreises und des Ankreises, der die Verlängerungen der beiden Katheten berührt?

Wegleitung: Ist die zuletzt genannte Kathete  $x$  cm lang, so mißt die andere Kathete  $(\frac{7}{4}x - 4)$  cm und die Hypotenuse  $(\frac{7}{4}x + 4)$  cm, somit wird  $x$  bestimmt durch die Gleichung

$$(\frac{7}{4}x + 4)^2 - (\frac{7}{4}x - 4)^2 = x^2.$$

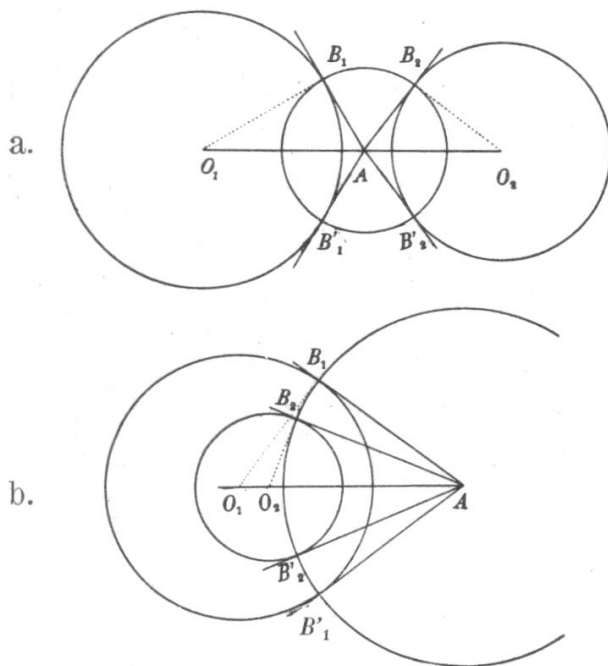
Weil die auf zwei Seiten des Dreiecks oder auf deren Verlängerungen liegenden Berührungspunkte eines Kreises vom Schnittpunkt der ersteren gleich weit entfernt sind, so bilden die Strecken, die den Schnittpunkt der beiden Katheten mit den beiden Kreismittelpunkten verbinden, die Diagonalen zweier Quadrate, welche die gesuchten Radien zu Seiten haben. Bezeichnet man also die Katheten mit  $a$  und  $b$ , die Hypotenuse mit  $c$ , den Radius des Inkreises mit  $y$  und den des Ankreises mit  $z$ , so ist

$$\begin{aligned} a - y + b - y &= c \\ z - a + z - b &= c \end{aligned}$$

$$(a = 28, b = 45, c = 53, y = 10, z = 63.)$$

**B 17**

(*Tang., Pyth., Gl. m. 1 Unb.*)



Es seien  $r_1$  und  $r_2$  die Radien zweier Kreise, die keinen Punkt gemein haben,  $c$  die Entfernung ihrer Mittelpunkte  $O_1$  und  $O_2$ .

1. Es soll auf der Zentralen der beiden Kreise ein Punkt  $A$  ermittelt werden, von dem aus an diese vier gleich lange Tangenten, gemessen von  $A$  bis zu den Berührungspunkten, gezogen werden können.

2. Es soll  $O_1A$  und die Länge der von  $A$  ausgehenden Tangenten berechnet werden für den Fall (a), wo  $r_1 = 28$  cm,  $r_2 = 22$  cm,  $c = 60$  cm und für den Fall (b), wo  $r_1 = 27$  cm,  $r_2 = 15$  cm und  $c = 6$  cm ist.

Wegleitung: Es sei  $r_1 > r_2$  und es werde  $O_1A$  mit  $x$  bezeichnet.

Schließen die Kreise einander aus (Fig. a), so liegt der Punkt  $A$  zwischen den beiden Kreisen und es sind dann die Quadrate der Tangentenlängen  $AB_1$  und  $AB_2$

$$x^2 - r_1^2 = (c - x)^2 - r_2^2$$

daher 
$$x = \frac{c^2 + r_1^2 - r_2^2}{2c}$$

Schließt aber der eine Kreis den andern ein (Fig. b), so kann der Punkt  $A$  nur auf der Verlängerung der Strecke  $O_1 O_2$  über  $O_2$  hinaus liegen, also ist dann

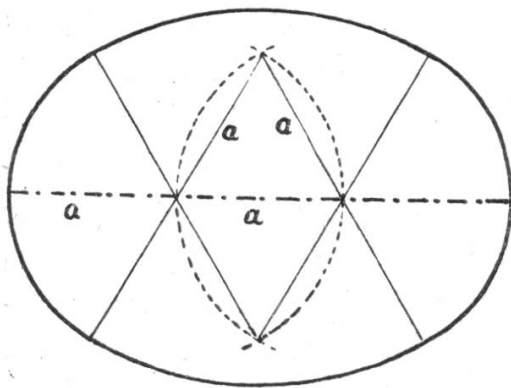
$$x^2 - r_1^2 = (x - c)^2 - r_2^2,$$

woraus sich wieder der oben berechnete Ausdruck für  $x$  ergibt.

Nach (2) zu fragen: Welche Lage hat der Kreis mit dem Mittelpunkt  $A$  und dem Radius  $AB_1$  zu den gegebenen Kreisen?

[(a)  $AB_1 = 16\frac{1}{2}$  cm, (b)  $AB_1 = 36$  cm.]

**B 18** (Fl. des gleichseit. Dreiecks u. des Kr.-Sektors.)



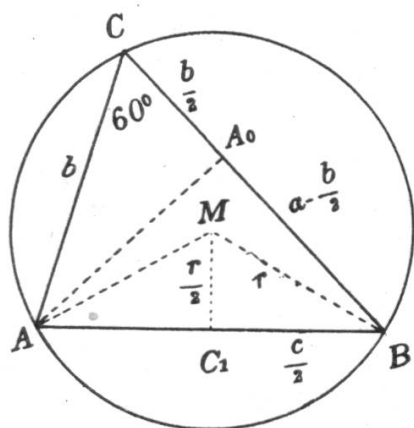
Konstruktion eines Ovals aus Kreisbogen mit dem Radius  $a$  und  $2a$  nach der Skizze. Wie groß sind Umfang und Inhalt der Figur? Wie lang sind die Symmetrieachsen?

$$\left[ \frac{8a\pi}{3}, \left( 2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2; \right. \\ \left. 3a, a(4 - \sqrt{3}). \right]$$

**B 19** (Pyth., Periph.-W., Sektorfl.)

In einem Dreieck  $ABC$  seien  $a$  und  $b$  die Maßzahlen der Seiten  $BC$  und  $AC$ ; der Winkel  $ABC$  messe  $60^\circ$ . Man drücke die Maßzahl  $c$  der Seite  $AB$ , sowie die Maßzahl  $F$  der Fläche des über dieser Seite liegenden Segmentes des Umkreises des Dreiecks durch  $a$  und  $b$  aus.

Wegleitung: Es sei  $a > b$ . Wir ziehen die Höhe  $AA_0$ . Im Dreieck  $AA_0C$  mißt die Kathete  $CA_0$   $\frac{b}{2}$ , folglich das



Quadrat über  $AA_0$   $b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ;  
daher ist im rechtwinkligen  
Dreieck  $ABA_0$

$$c^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$c^2 = a^2 - ab + b^2.$$

Bezeichnet  $M$  den Mittelpunkt,  
 $r$  die Maßzahl des Radius des  
Umkreises und  $C_1$  den Halbier-  
ungspunkt der Seite  $AB$ , so ist im Dreieck  $BMC_1$  der  
Winkel bei  $M$   $60^\circ$ , daher

$$r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

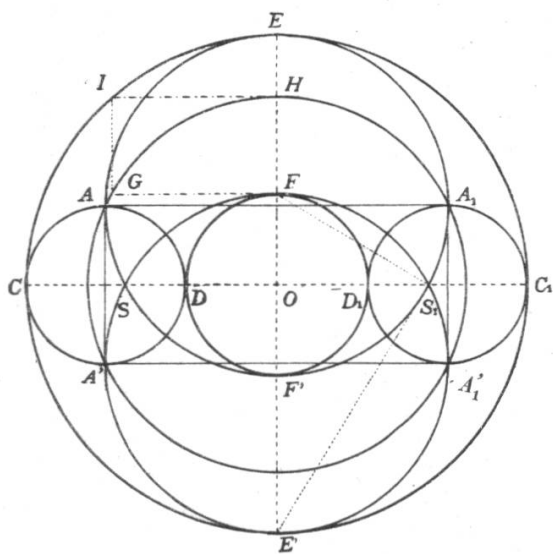
$$r^2 = \frac{c^2}{3} \text{ und } r = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Die Fläche des Kreissektors  $AMB$  ist  $\frac{\pi}{3} r^2$ , die Fläche des

Dreiecks  $AMB$   $\frac{cr}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{12}$ , mithin

$$F = \frac{\pi}{9} c^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} c^2 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36} (a^2 - ab + b^2).$$

## B 20 (Kr.-Berühr., Kr.-Fl., Hyp. u. Höh.-Quadr.)

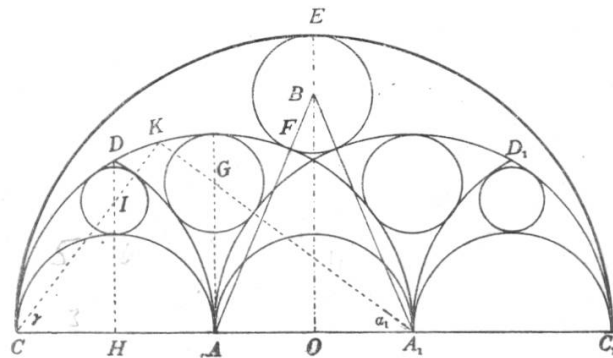


$AA_1 A_1' A'$  seien die  
Ecken eines Rechtecks,  
dessen Seiten die Maß-  
zahlen  $2x$  und  $2y$  haben,  
wo  $x > y$  ist. Wir legen  
um alle vier Seiten als  
Durchmesser Kreise. Die  
beiden kleineren schneiden  
die zu den längeren Seiten  
parallele Symmetrieachse  
des Rechteckes in den  
Punkten  $C$  und  $D$ ,  $C_1$  und  
 $D_1$ , während die beiden



größeren Kreise die zu den kürzeren Seiten parallele Symmetrieachse des Rechteckes in den Punkten  $E$  und  $F'$ ,  $E'$  und  $F$  schneiden. Sowohl  $OC$  und  $OC_1$ , als auch  $OE$  und  $OE'$  messen  $(x+y)$  L.-E., deshalb berührt ein Kreis um  $O$ , dessen Radius  $(x+y)$  L.-E. hat, die vier vorhin genannten Kreise umschließend.  $OD = (x-y)$  L.-E. Weil  $OF = E'F - E'O$ , so messen  $OF$  und  $OF'$   $2x - (x+y) = (x-y)$  L.-E.; mithin berührt ein Kreis um  $O$ , dessen Radius  $(x-y)$  L.-E. hat, die Kreise mit den Durchmessern  $AA'$  und  $A_1A_1'$  von außen und die Kreise mit den Durchmessern  $AA_1$  und  $A'A_1'$  von innen. Wie viele L.-E. mißt der Radius des Umkreises des Rechtecks? Wie teilt dieser Kreis die Fläche des Ringes, der von den Kreisen mit den Durchmessern  $CC_1$  und  $DD_1$  begrenzt wird? Wenn wir die Tangente mit dem Berührungspunkt  $F$  mit dem Umkreis des Rechtecks in  $G$  und die Tangente, die den zuletzt genannten Kreis in  $H$  berührt, mit dem Kreis um  $CC_1$  in  $I$  schneiden, welche Maßzahlen haben dann die Strecken  $FG$  und  $HI$ ? Wie groß ist schließlich der Abstand der Schnittpunkte  $S$  und  $S_1$  der um die größeren Rechteckseiten gelegten Kreise vom Mittelpunkt des Rechtecks? [ $FG = HI = \sqrt{2xy}$ ,  $OS = OS_1 = \sqrt{x^2 - y^2}$ .]

**B 21** (Kr.-Berühr., Pyth., Gl. m. 1 Unb., Ähnlichk.)



Das Gerippe des Maßwerkes eines Kirchenfensters in Florenz ergibt sich aus einem gleichschenkligen Dreieck  $AA_1B$  bei dem Verhältnis das des Schenkels  $AB$  zur Basis  $AA_1$   $^{13}/_{10}$  ist, indem man um  $A$  durch  $A_1$  einen Halbkreis  $A_1C$  und um  $A_1$  durch  $A$  einen Halbkreis  $AC_1$  legt. Um  $C$  und  $C_1$

legen wir mit dem Radius  $AA_1$  die Kreisbogen  $AD$  und  $A_1D_1$ . Der um den Halbierungspunkt  $O$  der Basis  $AA_1$  durch  $C$  gelegte Halbkreis endigt in  $C_1$  und schneidet die Gerade  $OB$  in einem Punkt  $E$ . Wählen wir den zehnten Teil von  $AA_1$  als Maßeinheit, so hat  $AB$  die Maßzahl 13,  $OB$  die Maßzahl 12 und  $OE$  die Maßzahl 15. Der Schenkel  $AB$  wird vom Kreis um  $A$  im Punkt  $F$  geschnitten. Da die Strecken  $BE$  und  $BF$  die Maßzahl 3 haben, berührt der Kreis um  $B$  durch  $E$  die Halbkreise um  $A$  und  $A_1$ .

Es soll nun ein Kreis gelegt werden, der die von  $A$  ausgehenden Kreisbogen von außen und den Halbkreis um  $A$  von innen berührt. Sein Mittelpunkt  $G$  liegt auf der in  $A$  auf  $CC_1$  errichteten Normalen. Ist  $x$  die Maßzahl seines Radius, so haben die Seiten  $GA$ ,  $AA_1$  und  $A_1G$  des rechtwinkligen Dreiecks  $GAA_1$  der Reihe nach die Maßzahlen  $10 - x$ ,  $10$  und  $10 + x$ , folglich besteht die Gleichung

$$(10 + x)^2 - (10 - x)^2 = 10^2,$$

aus der sich

$$x = 2\frac{1}{2}$$

ergibt. Es hat daher  $GA$   $7\frac{1}{2}$ ,  $AA_1$   $10$  und  $A_1G$   $12\frac{1}{2}$  L.-E., d. h. es verhält sich

$$GA : AA_1 : A_1G = 3 : 4 : 5.$$

Wir beschreiben jetzt über  $CA$ ,  $AA_1$  und  $A_1C_1$  als Durchmesser Halbkreise und bestimmen einen Kreis, der den Halbkreis über  $CA$  von außen und die Kreisbogen  $CD$  und  $AD$  von innen berührt. Bezeichnen wir den Halbierungspunkt von  $CA$  mit  $H$ , den Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit  $I$  und die Maßzahl seines Radius mit  $y$ , so haben die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks  $CHI$  der Reihe nach die Maßzahlen  $5$ ,  $5 + y$  und  $10 - y$ ; somit ist

$$5^2 + (5 + y)^2 = (10 - y)^2$$

$$y = \frac{5}{3}.$$

Die soeben genannten Maßzahlen haben also die Werte  $5$ ,  $\frac{20}{3}$ ,  $\frac{25}{3}$ ; d. h. es verhält sich

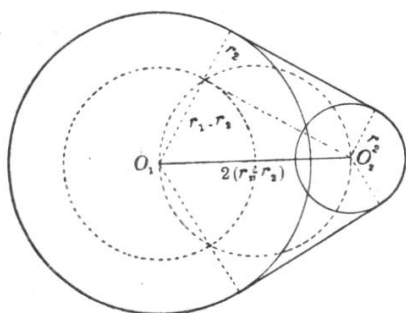
$$CH : HI : IC = 3 : 4 : 5.$$

Somit  $\triangle CHI \sim \triangle GAA_1$ ;

die Winkel  $\gamma$  und  $\alpha_1$  sind komplementär. Die beiden Geraden  $CI$  und  $A_1G$  schneiden einander in einem Punkt  $K$  des Halbkreises um  $A$ ; überdies ist das Dreieck  $CKA_1$  den vorhin genannten Dreiecken ähnlich, weshalb  $CK = \frac{3}{5} CA_1$  ist, also die Maßzahl 12 hat und daher ebenso lang wie  $OB$  ist. Damit ist der Punkt  $K$  bestimmt, dessen Verbindungslinien mit  $C$  und  $A$ , bzw. aus den in  $H$  und  $A$  errichteten Normalen von  $CC_1$  die Punkte  $I$  und  $G$  ausschneiden.

Man zeige umgekehrt auf Grund dieser Konstruktion, daß die Kreise um  $I$  und  $G$  den gestellten Anforderungen genügen.

**B 22** (*Gemeins. Tang. 2er Kr., Pyth., Trapezfl., Kr.-Berechn.*)



Der Abstand der Mittelpunkte  $O_1$  und  $O_2$  zweier Kreise ist gleich dem doppelten Unterschied ihrer Radien  $r_1$  und  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ). Man drücke durch diese die Fläche  $F$  und den Umfang  $u$  des nirgends konkaven Flächenstückes aus, das von den äußeren gemeinsamen Tangenten

der beiden Kreise und den zwischen deren Berührungspunkten befindlichen Bogen begrenzt wird.

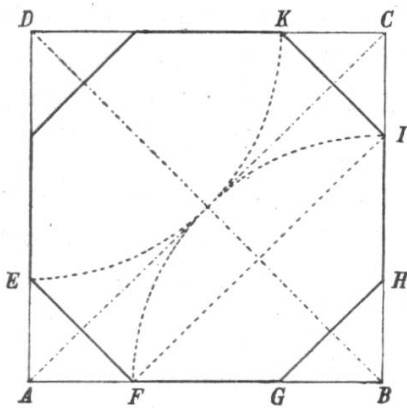
Wegleitung: Konstruktion der äußeren gemeinsamen Tangenten mit Hilfe des Kreises um  $O_1$  mit dem Radius  $r_1 - r_2$  und des Kreises mit dem Durchmesser  $O_1O_2$ . Beim Dreieck mit der Hypotenuse  $O_1O_2$  und der einen Kathete  $r_1 - r_2$  ist die andere Kathete  $(r_1 - r_2)\sqrt{3}$  und gleich einer äußeren gemeinsamen Tangente; der kleinere spitze Winkel des Dreiecks beträgt  $30^\circ$ . Hieraus ergibt sich

$$u = 2(r_1 - r_2)\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi(2r_1 + r_2)$$

$$F = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}(2r_1^2 + r_2^2).$$

**B 23** (*Regul. Achteck, Vol. u. Gew. des Prismas*)

Welches Gewicht hat auf 1 kg genau eine 4 m hohe Säule aus Granit von der Dichte 2,75, deren Basis ein regelmäßiges Achteck ist, dessen Gegenseiten 50 cm Abstand haben?



Wegleitung: Die Ecken eines Achteckes mit dem Gegenseitenabstand  $b$  werden aus den Seiten eines Quadrates  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $b$  durch Kreise herausgeschnitten, die um die Ecken des Quadrates durch seinen Mittelpunkt  $O$  gelegt werden. Sind  $EFGHIK$  aufeinanderfolgende Ecken des Achteckes, so ist  $FI$  gleich  $b$ . Die Diagonale

des Quadrates übertrifft somit  $b$  an Länge um die Achteckseite  $x$ ; folglich ist  $x = b(\sqrt{2} - 1)$ . Die vier gleichschenkligen Dreiecke, die das Achteck zum Quadrat  $ABCD$  ergänzen, können zu einem Quadrat mit der Seite  $x$  zusammengeschoben werden. Es ist daher die Fläche des Achteckes

$$F = b^2 - x^2 = 2b^2(\sqrt{2} - 1),$$

folglich das Gewicht der Säule

$$G = 2 \cdot 5^2 (\sqrt{2} - 1) \cdot 40 \cdot 2,75 \text{ kg} = 5500 (\sqrt{2} - 1) \text{ kg}.$$

Weil das Resultat auf kg genau sein soll, müssen wir  $\sqrt{2}$  auf 4 Dez.-Stellen ausrechnen und erhalten

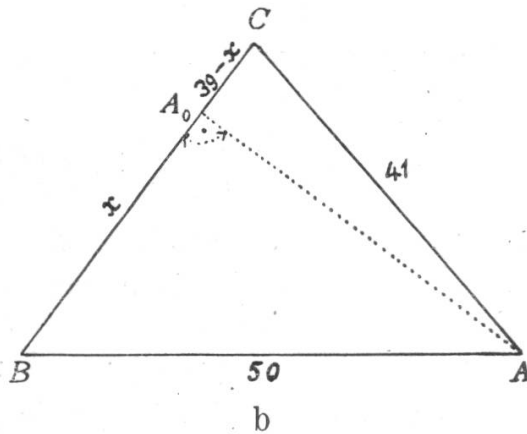
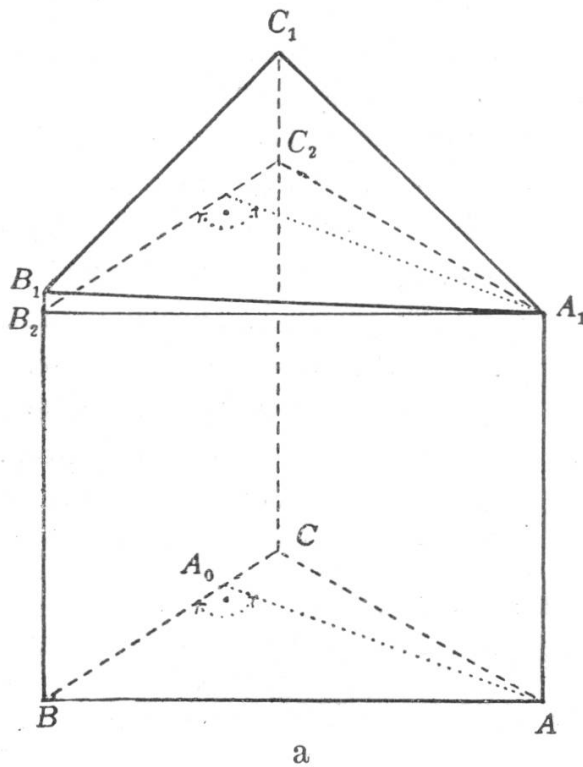
$$G = 5500 \cdot 0,4142 \text{ kg} = 2278 \text{ kg}.$$

### B 24 (Vol. u. Gew. des Prismas u. der Pyr., Gl. m. 1 Unb.)

Ein senkrechtcs, jedoch oben schief abgeschnittenes, dreiseitiges Prisma  $ABCA_1B_1C_1$  (Fig. a) aus Eisen von der Dichte 7,5 hat die Grundkanten  $AB = 5 \text{ cm}$ ,  $BC = 3,9 \text{ cm}$ ,  $CA = 4,1 \text{ cm}$ . Jede Seitenkante ist ebenso lang wie die ihr gegenüberliegende Grundkante. Wie viel wiegt dieser Körper?

Wegleitung: Wir zerlegen den Körper durch einen ebenen Schnitt, den wir durch den oberen Endpunkt  $A_1$  der kürzesten Seitenkante legen, in das senkrechte dreiseitige Prisma  $ABC A_1B_2C_2$  und in die vierseitige Pyramide, deren Grundfläche das Trapez  $B_2C_2C_1B_1$  und deren Spitze der Punkt  $A_1$  ist. Die Seitenfläche  $B_2C_2A_1$  dieser Pyramide liegt normal zu deren Grundfläche; die von  $A_1$  auf  $B_2C_2$  gefällte Normale,

gemessen von  $A_1$  bis zu ihrem Fußpunkt, ist daher nicht nur die Höhe des Dreiecks  $B_2C_2A_1$ , sondern zugleich die Höhe



der Pyramide. Da aber die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_2C_2$  kongruent sind, so ist die

Höhe des letzteren gleich der Höhe  $AA_0$  des ersteren. Das Dreieck  $ABC$  ist in Fig. b, deren Maßzahlen sich auf Millimeter beziehen, in wahrer Gestalt gezeichnet. Um die Strecke  $AA_0$  zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Maßzahl  $x$  der Strecke  $BA_0$ . Für die Maßzahl des Quadrates über der gemeinsamen

Seite der Dreiecke  $AA_0B$  und  $AA_0C$  erhalten wir die Gleichung  $5^2 - x^2 = 4,1^2 - (3,9 - x)^2$  woraus sich  $x = 3$  und daher  $AA_0 = 4$  cm ergibt. Das Dreieck  $ABC$  hat somit einen Flächeninhalt von  $7,8 \text{ cm}^2$  und das Prisma  $ABCA_1B_2C_2$  einen Rauminhalt

von  $7,8 \cdot 3,9 \text{ cm}^3 = 30,42 \text{ cm}^3$ . Die Grundfläche der Pyramide ist ein Trapez mit den parallelen Seiten  $B_1B_2 = 0,2 \text{ cm}$  und  $C_1C_2 = 1,1 \text{ cm}$  und der Höhe  $B_2C_2 = 3,9 \text{ cm}$ , das  $\frac{1,3}{2} \cdot 3,9 \text{ cm}^2$  mißt. Die Pyramide hat folglich einen Rauminhalt von  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1,3}{2} \cdot 3,9 \cdot 4 \text{ cm}^3 = 3,38 \text{ cm}^3$ . Das Gewicht des ganzen Körpers beträgt  $(30,42 + 3,38) 7,5 \text{ g} = 253\frac{1}{2} \text{ g}$ .

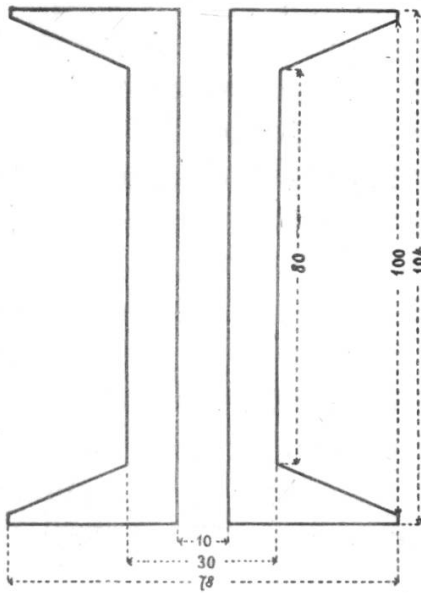
(Die Probe nach der Formel  $V = F \cdot \frac{p + q + r}{3}$  für den Rauminhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas mit der Normalschnittfläche  $F$  und den Seitenkanten  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ergibt  $V = 7,8 \cdot \frac{5 + 3,9 + 4,1}{3} = 33,8$ .)

**B 25** (Sektor- u. Kr.-Fl., Pyth., ähnl. Dreiecke)

Ein Sektor, dessen Radius 53 cm mißt, wird von einem 176 cm langen Kreisbogen begrenzt. Er wird durch Aneinanderlegen der ihn begrenzenden Radien zum Mantel eines Kegels zusammengebogen. Wie groß ist der Mantel  $M$  und der Rauminhalt  $V$  des Kegels? ( $\pi = \frac{22}{7}$ .) [ $M = 4664 \text{ cm}^2$ ,  $V = 36960 \text{ cm}^3$ .]

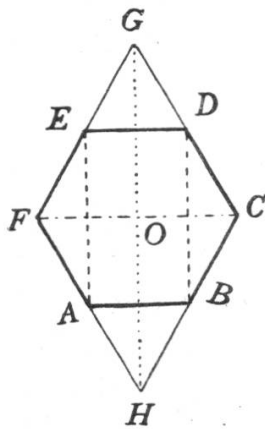
Wenn man den Kegel durch eine 15 cm von der Spitze abstehende Ebene parallel zur Grundfläche in zwei Körper zerschneidet, was ist dann der Rauminhalt des kleineren Körpers für ein Bruchteil von dem des größeren? ( $\frac{1}{26}$ .)

**B 26** (Vol. u. Gew. des Zyl. u. Kegelstumpfes)



Es soll auf Gramm genau das Gewicht einer Spule aus Steinbuchenholz (Dichte 0,679) bestimmt werden, deren Achsenschnitt die Figur darstellt, wo die beigeetzten Maßzahlen sich auf Millimeter beziehen. ( $\pi = \frac{22}{7}$ .)  
[79 g.]

**B 27** (Mantel, Vol. u. Gew. des Kegels, Zyl.-Mantel, Rechn. m. Näherungswerten)



Man konstruiert ein regelmäßiges Sechseck von 1 dm Seitenlänge  $ABCDEF$  und läßt es um die normal zu  $AB$  liegende Symmetrieachse rotieren.

1. Man beschreibe den entstehenden Rotationskörper und berechne seinen Rauminhalt.

Wegleitung: Wenn man  $CD$  und  $FE$  bis zum Schnitt in  $G$ , ferner  $CB$  und  $FA$  bis zum Schnitt in  $H$  verlängert, erhält man den Rhombus  $FHCG$ , durch dessen Rotation um  $GH$  der Doppelkegel mit den Spitzen  $G$  und  $H$  entsteht, dessen Basis die Fläche des Kreises um  $O$  durch  $C$  ist. Höhe des einfachen Kegels  $\sqrt{3}$  dm, Rauminhalt  $\frac{\pi}{3} \sqrt{3}$  dm<sup>3</sup>. Der Kegel, der durch Rotation des Dreiecks  $EDG$  entsteht, hat  $\frac{\pi}{24} \sqrt{3}$  dm<sup>3</sup>; somit ist der Rauminhalt des zu berechnenden Rotationskörpers  $2 \left( \frac{\pi}{3} \sqrt{3} - \frac{\pi}{24} \sqrt{3} \right) = \frac{7}{12} \pi \sqrt{3}$  dm<sup>3</sup>.

2. Man stelle sich vor, der Rotationskörper sei aus Holz von der Dichte 0,6 hergestellt und hierauf der Zylinder, der durch die Rotation des Rechtecks  $ABDE$  um  $GH$  entsteht, herausgedreht worden. Wie groß ist die Oberfläche  $S$  des übrig bleibenden Ringes auf 1 mm<sup>2</sup> und sein Gewicht  $P$  auf 1 g genau?

Wegleitung: Die Oberfläche des Körpers besteht aus den Mänteln zweier Kegelstumpfe und aus einem Zylindermantel. Was entsteht durch Abwicklung eines Kegelmantels? Wie berechnet man die Fläche eines Kreissektors? Der durch die Rotation des Dreiecks  $FCG$  entstehende Kegel hat die Mantelfläche  $2\pi$  dm<sup>2</sup>; die Mantelfläche des aus  $EDG$  entstehenden Kegels mißt  $\frac{\pi}{2}$  dm<sup>2</sup>, daher die des Ringes  $2 \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 3\pi$  dm<sup>2</sup>. Der Zylindermantel mißt  $\pi \sqrt{3}$  dm<sup>2</sup>. Somit ist die Gesamtoberfläche des Ringes

$$S = (3\pi + \pi\sqrt{3}) \text{ dm}^2.$$

Der Zylinder hat den Rauminhalt  $\frac{\pi}{4}\sqrt{3} \text{ dm}^3$ ; der Ring mißt

$$\text{somit } \frac{7}{12}\pi\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} \text{ dm}^3.$$

Ein Kubikdezimeter Wasser wiegt 1 kg, ein Kubikdezimeter Holz 0,6 kg. Folglich beträgt das Gewicht des Ringes

$$P = 0,6 \cdot \frac{\pi}{3}\sqrt{3} = 0,2\pi\sqrt{3} \text{ kg}.$$

Wir haben  $S$  auf 4 und  $P$  3 Dez.-Stellen zu bestimmen, müssen daher  $\pi$  auf 5 Dez.-Stellen genau kennen und  $\sqrt{3}$  ebenso genau ausrechnen.  $\pi = 3,14159$ ,  $\sqrt{3} = 1,73205$ ,  $\pi\sqrt{3} = 5,4414$ ,  $3\pi = 9,4248$ , daher  $S = 14,8662 \text{ dm}^2$ ,  $P = 1,088 \text{ kg}$ .

### B 28 *Diagonale u. Vol. des Quaders, Kugelvol.*)

Welchen Durchmesser muß eine hölzerne Kugel mindestens haben, damit man aus ihr einen Quader heraus schneiden kann, dessen Kanten 8 cm, 11 cm und 16 cm messen? Wie viel Prozent des Rauminhaltes der Kugel beträgt in diesem Fall der Rauminhalt des Quaders?  $\pi = \frac{22}{7}$ .

Wegleitung: Der Minimaldurchmesser der Kugel  $d$  ist gleich der Körperdiagonale des Quaders, somit

$$d^2 = 64 + 121 + 256 = 441$$

$$d = 21 \text{ cm},$$

daher in diesem Fall das Verhältnis des Quader- zum Kugelvolumen

$$\frac{8 \cdot 11 \cdot 16}{\frac{22}{42} \cdot 21^3} = \frac{128}{441} = 0,29 \text{ oder } 29\%.$$

### B 29 *(Kugelvol.; Auftrieb)*

Eine Schale aus Aluminium von der Dichte 2,56 hat die Gestalt einer hohlen Halbkugel von 1 dm äußerem Durchmesser und 5 mm Dicke.

1. Schwimmt die Schale im Wasser oder sinkt sie unter?
2. Wie viele Einfrankenstücke kann sie höchstens aufnehmen, soll sie nicht untersinken?



Wegleitung: 1. Sie schwimmt leer oder sinkt unter, je nachdem

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi (50^3 - 45^3) 2,56 &\geq \frac{2}{3} \pi \cdot 50^3 \\ \text{oder } 50^3 \cdot 1,56 &\geq 45^3 \cdot 2,56 \\ 10^3 \cdot 39 &\geq 9^3 \cdot 64. \\ 39000 &< 729 \cdot 64, \end{aligned}$$

somit schwimmt die leere Schale im Wasser.

2. Die obere Grenze  $G$  des Gewichtes, das die Schale tragen kann, ohne im Wasser unterzusinken, wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi (50^3 - 45^3) 2,56 + G &= \frac{2}{3} \pi 50^3 \\ G &= \frac{2}{3} \pi [45^3 \cdot 2,56 - 50^3 \cdot 1,56] \text{ mg} \\ G &= 10 \pi (243 \cdot 64 - 10^3 \cdot 13) \text{ mg} = 80,17 \text{ g}. \end{aligned}$$

Da ein Frankenstück 5 g wiegt, so kann die Schale 16 Einfrankenstücke aufnehmen, ohne im Wasser unterzusinken.

---

### Abkürzungen.

Berühr.	für	Berührung
Fl.	„	Fläche
Gew.	„	Gewicht
Gl.	„	Gleichung
Hyp.	„	Hypotenuse
Kr.	„	Kreis
m.	„	mit
Periph.	„	Peripherie
Pyr.	„	Pyramide
Pyth.	„	Pythagoräischer Lehrsatz
Quadr.	„	Quadrat
reg.	„	regelmäßig
Tang.	„	Tangente
Unb.	„	Unbekannte
Vol.	„	Volumen
W.	„	Winkel
Zyl.	„	Zylinder